# 使用 Geogebra 解常微分方程

在高中阶段，变加速直线运动的分析是一个难点，限于高中数学知识的局限，很多问题往往只能定性分析，要定量计算，往往要涉及常微分方程的求解。

## 1、电磁感应中恒力作用下物体做切割磁感线运动的分析

此类问题在高中物理中很常见，我们可以通过受力平衡求解收尾速度、利用法拉第电磁感应定律求电量、动能定理求产生的电能和内能等。

### 例 1

此题为 2011 年上海高考题：

a

*B*

30°

b

*R*

电阻可忽略的光滑平行金属导轨长 *s* = 1.15 m，两导轨间距 *L* = 0.75 m，导轨倾角为 30°，导轨上端 ab 接一阻值 *R* = 1.5 Ω 的电阻，磁感应强度 *B* = 0.8 T 的匀强磁场垂直轨道平面向上。阻值 *r* = 0.5 Ω，质量 *m* = 0.2 kg 的金属棒与轨道垂直且接触良好，从轨道上端 ab 处由静止开始下滑至底端，在此过程中金属棒产生的焦耳热 *Q*r = 0.1 J。（取 *g* = 10m/s2）求：

（1）金属棒在此过程中克服安培力的功 *W*安；

（2）金属棒下滑速度 *v* = 2 m/s 时的加速度 *a*；

（3）为求金属棒下滑的最大速度 *v*m，有同学解答如下：由动能定理 *W*重 − *W*安 = *mv*m2，……。由此所得结果是否正确？若正确，说明理由并完成本小题；若不正确，给出正确的解答。

【参考答案】（1）W安 = 0.4 J （2）a = 3.2 m/s2 （3）vm = 2.74 m/s

**【分析】**

这里关注的是第（3）小问，最大速度 *v*m 的答案为 2.74 m/s。限于高中生的知识局限，只能用动能定理解决。

*W*安 = *Q* = *Q*R + *Q*r = 0.4 J

*mgs*sin30° − *Q* = *mv*m2

*v*m = = m/s = 2.74 m/s

**【微积分解法】**

如果运用微积分知识是可以直接求得速度大小的。

若只需求得 *s* 与 *v* 的函数关系，解法如下：

由牛顿第二定律可知：

*mg*sin*θ* − = *ma*

代入数据可得 *v* 和 *a* 的关系式：

*a* = 5 − 0.9*v*

对应的微分方程为：

= = ＝

使用分离变量法解此方程：

d*s* = d*v*，初始条件为 *s*|*v* = 0 = 0

*s* = （− 0.9*v* − 5ln（− 0.9*v* + 5）+ 5ln5）

将 *s* = 1.15 m 代入以上函数可解得：*v* = 2.74 m/s。

若还需要求时间 *t*，可以写出以下微分方程

= *a* = 5 − 0.9*v*，*v*|*t* = 0 = 0

解得

*t* = [ln5 − ln(−0.9*v* + 5)]

或

*v* ＝ （1 − *e*−0.9*t*）

将 *v* = 2.74 m/s 代入以上函数，可求得 *t* = 0.75515 s。

进一步利用以下微分方程，还可以求出 *s* 与 *t* 的函数关系：

= *v* = （1 − *e*−0.9*t*），*s*|*t* = 0 = 0

解得

*s* =

将 *s* = 1.15 m 代入以上函数，可求得 *t* = 0.75484 s。**数据是自洽的**。

以上方程的求解很费时间，我翻出《高等数学》课本，花了老半天才解出结果。

## 2、使用 Geogebra 解常微分方程

在 Geogebra 中内置了解常微分方程的指令“解常微分方程[<fʹ(x,y)>]”，可以用来解 = *f*ʹ(*x*,*y*) 的解。

以上题为例，*v* 和 *a* 的关系式为：

*a* = 5 − 0.9*v*

对应的常微分方程为：

= *a* = 5 − 0.9*v*，*v*|*t* = 0 = 0

5 − 0.9*v* 为一线性函数，令 *k* = 0.9，*b* = 5，*v*0 = 0，这样就可以在 Geogebra 中动态设置这些变量，解决其他类似的问题。关键步骤如下：

1、设置对应 *k*、*b*、*v*0 变量的滑动条，设置表示时间 *t* 的滑动条；

2、输入 “f(x) = 解常微分方程(b – ky,(0,v0))”，这样就能绘制出 *v* – *t* 图像，并显示求解结果 “f(x) ＝  *e*−0.9*t* + ”，这个结果与前面解析求解的结果是相同的。

3、输入 “s = 积分(f,0,t)”，这样就可以通过 *v* – *t* 图像面积求出对应位移。

如下图所示，令滑动条 b = 5，k = 0.9，v0 = 0，将时间 t 拉至 0.755，对应的速度 *v* = 2.74 m/s，位移 *s* = 1.15 m。这个结果与前面解析求解的结果也是相同的。



**点击图片可观看动态演示**

## 3、使用 Geogebra 快速验证相关问题

有了上述工具，就可以验证一下其他题目了。

先说结论：**在电磁感应中求解变加速运动过程中的能量、电量，若出现具体数字，一定要检查数据是否自洽，而不是为了计算简便凑数据**。

### 例 2

此题是约 20 年前的一道老题：

光滑平行金属导轨长 *L* = 2 m，二导轨间距 *d* = 0.5 m，轨道平面与水平面的夹角为 *θ* = 30°，导轨上端接一阻值为 *R* = 0.5 Ω 的电阻，其余电阻不计，轨道所在空间有垂直轨道平面的匀强磁场，磁感应强度 *B* = 1 T。有一不计电阻的金属棒 ab 的质量 *m* = 0.5 kg，放在导轨最上端，如图所示。当 ab 棒从最上端由静止开始自由下滑，到达底端脱离轨道时，电阻 *R* 上产生的热量为 *Q* = 1 J，求：

a

b

*B*

*R*

30°

30°

（1）当棒的速度为 *v* = 2 m/s 时，它的加速度是多少？

（2）棒下滑的最大速度是多少？

（3）棒下滑过程中通过电阻 *R* 的最大电流是多少？

【参考解答】（1）a = 3 m/s2 （2）vm = 4 m/s （3）Im = 4 A

**【验证】**

由牛顿第二定律得：*mg*sin30° − = *ma*

代入数据可得 *v* 和 *a* 的关系式：*a* = 5 – *v*

在 Geogebra 程序中将设置 b = 5，k = 1，v0 = 0，结果是“**到达底端位移为 2 m，用时 *t* = 1.05 s，速度为 *v* = 3.25 m/s**，**而不是参考答案中的 4 m/s**”。错误的原因是 *Q* = 1 J 这个数据不自洽，导致此题（2）（3）都是错误的。

### 例 3

此题是一道约 15 年前的老题：

如图甲所示，MN、PQ 为间距 *L* = 0.5 m 足够长的平行导轨，NQ⊥MN，导轨的电阻均不计。导轨平面与水平面间的夹角 *θ* = 37°，NQ 间连接有一个 *R* = 4 Ω 的电阻。有一匀强磁场垂直于导轨平面且方向向上，磁感应强度为 *B*0 = 1 T。将一根质量为 *m* = 0.05 kg 的金属棒 ab 紧靠 NQ 放置在导轨上，且与导轨接触良好。现由静止释放金属棒，当金属棒滑行至 cd 处时达到稳定速度，已知在此过程中通过金属棒截面的电量 *q* = 0.2 C，且金属棒的加速度 *a* 与速度 *v* 的关系如图乙所示，设金属棒沿导轨向下运动过程中始终与 NQ 平行。（取 *g* = 10 m/s2，sin37° = 0.6，cos37° = 0.8）。求：

a

M

P

N

*B*0

b

Q

*θ*

*R*

c

d

图甲

*v*/(m·s−1)

*O*

*a*/(m·s−2)

2

2

图乙

（1）金属棒与导轨间的动摩擦因数 *μ*；

（2）cd 离 NQ 的距离 *s*；

（3）金属棒滑行至 cd 处的过程中，电阻 *R* 上产生的热量。

【参考解答】（1）μ = 0.5 （2）s = 2 m （3）QR = 0.08 J

**【验证】**

图像已经直接给出了 *v* 和 *a* 的关系式：*a* = 2 – *v*

在 Geogebra 程序中将设置 b = 2，k = 1，v0 = 0，结果是“**当速度 *v* ≈ 2 m/s 时，用时 *t* ≈ 6 s，位移 *s* ≈ 10 m，而不是参考答案中的 2 m**”。错误的原因是电量 *q* = 0.2 C 这个数据不自洽，导致此题（2）（3）都是错误的。

如何求达到稳定速度时的位移 *s*？过程如下：

由 *a* = 2 – *v*

得 = ＝

使用分离变量法解此方程：d*s* = d*v*，初始条件为 *s*|*v* = 0 = 0，解得：

*s* =− *v* − 2ln（− *v* + 2）+ 2ln2

将 *v* = 2 m/s 代入上式，出现 ln0 **无解**！那是因为根据对应的速度时间函数 *v* = −2e−*t*+ 2（过程略），理论上需要经过无穷大的时间才能达到稳定速度，对应的位移也是无穷大。

若将 *v* = 1.9 m/s 代入上述方程可解得 *s* = 4.09 m，速度为 1.99 m/s 时位移达到 8.61 m，速度为 1.999 m/s 是位移为 13.2 m……。那么前面为什么求出“**当速度 *v* ≈ 2 m/s 时，用时 *t* ≈ 6 s，位移 *s* ≈ 10 m**”呢？应该是程序中的小数点太多不显示的缘故，可能对应的速度只有 1.995… m/s。

所以关于“**多久、多远能达到稳定速度？”**是高中物理中一个比较头疼的问题，我们通常可以像例 1、例 4 那样回避稳定速度，或者以文字题的形式回避数值的运算。

### 例 4

此题是 2021 年河北高考模拟题：

如图 1 所示，两条足够长的平行金属导轨间距为 0.5 m，固定在倾角为 37° 的斜面上。导轨顶端连接一个阻值为 1 Ω 的电阻。在 MN 下方存在方向垂直于斜面向上、大小为 1 T 的匀强磁场。质量为 0.5 kg 的金属棒从 AB 处由静止开始沿导轨下滑，其运动过程中的 *v* – *t* 图象如图 2 所示。金属棒运动过程中与导轨保持垂直且接触良好，不计金属棒和导轨的电阻，取 *g* = 10 m/s2，sin37° = 0.6，cos37° = 0.8。

（1）求金属棒与导轨间的动摩擦因数；

（2）求金属棒在磁场中能够达到的最大速率；

（3）已知金属棒从进入磁场到速度达到 5 m/s 时通过电阻的电荷量为 1.3 C，求此过程中电阻产生的焦耳热。



【参考解答】（1）0.25 （2）8 m/s （3）2.95 J

**【验证】**

*v* 和 *a* 的关系式：*a* = 4 – 0.5*v*

在 Geogebra 程序中将设置 b = 4，k = 0.5，v0 = 4，结果是“**当速度 *v* = 5 m/s 时，位移 *s* = 2.6 m**”。数据是自洽的。

## 4、电磁感应中恒功率作用下物体做切割磁感线运动的分析

### 例 5

也是一道近 20 年前的老题了：

如图所示，电动机通过其转轴上的绝缘细绳竖直向上牵引一根原来静止的长为 *L* = 1 m、质量 *m* = 0.1 kg导体棒 ab，导体棒紧贴在竖直放置、电阻不计的金属框架上，导体棒的电阻 *R* = 1 Ω，磁感强度 *B* = 1 T 的匀强磁场方向垂直于导体框架所在平面，当导体棒在电动机牵引下上升 *h* = 3.8 m 时，获得稳定速度，此过程导体棒产生热量 *Q* = 2 J。电动机工作时，输出功率 *P* = 6 W 恒定，不计一切摩擦，求：

A

V

电源

a

b

*B*

电

动

机

转轴

× × × ×

× × × ×

× × × ×

× × × ×

（1）导体棒所达到的稳定速度是多少？

（2）导体棒从静止到达稳定速度的时间是多少？

【参考答案】（1）2 m/s （2）1 s

**【验证】**

第（1）小题的参考答案 *v* = 2 m/s，第（2）题的参考答案 *t* = 1 s。但是，就算棒以最大速度 2 m/s 运动，在 1 s 内的位移只有 2 m，小于题中 *h* = 3.8 m。错误的原因是 *h* 这个数据不自洽。

**【微积分求解】**

此题中 *v* 和 *a* 的关系式：*a* = = – 10*v* – 10，解这个方程，先分离变量：

= d*t*

− d*v* = d*t*

然后查《高等数学》书后的积分表

而

因此取 a = 10、b = 10、c = − 60，初始条件为 *t* | *v* = 0 = 0。解得：

*t* = − ln| 10*v2* + 10*v* – 60 | + ln+ ln 60 − ln

= − ln(*v* + 3) − ln(2 − *v*)+ ln 3 + ln 2

*v* 是取不到 2 的，方程无解，若取 *t* = 1 s，速度 *v* 能达到 1.9999999999 m/s，上升高度 *h* 约为 1.9532 m。可见，在恒功率情况下，物体可以在很短时间内接近收尾速度。

那么让 Geogebra 帮忙呢？输入函数，显示“？”，**它也不会解**？！原因是：虽然我们已经得到了 *t* – *v* 函数，但是它的反函数 *v* – *t* 没有可用初等函数表示的解析解。